

Лекция 1. Матрицалар және анықтауыштар

Матрица деп m - жол және n - бағаннан тұратын сандар немесе әріптерден құрылған тік бұрышты кестені айтады. Матрица латынның үлкен әріптерімен белгіленеді $A, B, C, \dots$ және былай жазылады:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

мұндағы $i = \overline{1, m}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) - жолдың нөмірі, $j = \overline{1, n}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) - бағанның нөмірі.

A матрицасының өлшемі $m \times n$ және оны $A_{m \times n}$ деп жазады. a_{ij} сандарын матрицаның элементтері дейді.

$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ элементтері бас диагональді құрайды.

Мысалы, матрица $A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ - 2×3 өлшемді матрица.

Бір жолдан тұратын матрицаны - **жол векторы** дейді, бір бағаннан тұратын матрицаны - **баған векторы** дейді.

$$(m \times 1) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \vec{c}, \quad (1 \times m) = (c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_m) = \vec{c}^T$$

Егер матрицаның жолдарының саны бағандарының санына тең болса, ондай матрицаны **квадрат матрица** дейді. Оның өлшемі $n \times n$ болады.

Егер квадрат матрицаның бас диагональдан тыс элементтері нөлге тең болса, онда ондай матрицаны **диагональ матрица** дейді.

Егер диагональ матрицаның бас диагональі бір сандарынан тұрса, онда ондай матрицаны **бірлік матрица** дейді және оны E деп белгілейді.

Егер квадрат матрицаның бас диагональінің бір жағына орналасқан элементтері түгелдей нөлге тең болса, онда оны **үшбұрышты матрица** дейді.

Егер матрицаның барлық элементтері нөлге тең болса, онда ондай матрицаны **нөлдік матрица** дейді.

Мысалы. а) квадрат матрица; б) диагональ матрица; в) бірлік матрица; г) үшбұрышты матрица; д) нөлдік матрица.

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ x & 4 & 0 \\ -7 & z & 3 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ в) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ г) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ д) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A матрицасының жолдарын сәйкес бағандар етіп алмастырғаннан пайда болған матрицаны **транспонирленген матрица** деп атайды және оны A^T деп белгілейді. Мынадай шарт орындалады : $a_{ij}^T = (a_{ji}), \forall i, j$

$$\text{Мысал. } \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Транспонирленген матрицаның қасиеттері :

1. $(A^T)^T = A$ (яғни екі рет транспонирленген A матрица бастапқы матрицаға тең болады)
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(AB)^T = B^T A^T$
4. $\det A = \det A^T$

Матрицаларға амалдар қолдану.

- Қосу амалы өлшемдері бірдей матрицалар үшін ғана енгізіледі. $A = (a_{ij})$ және $B = (b_{ij})$ бірдей өлшемдері матрицаларының қосындысы деп $C = (c_{ij})$ матрицасын айтамыз, оның әрбір элементі A және B сәйкес элементтерінің қосындысына тең: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Оны $C = A + B$ деп белгілейді.

Мысал. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$

- $A = (a_{ij})$ матрицасын λ санына көбейту деп әрбір элементі $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ болатын $B = (b_{ij})$ матрицасын айтамыз. Оны $B = \lambda A$ деп белгілейді.

Мысал. $2 \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}$

Матрицаларды қосу және матрицаны санға көбейту амалдарының қасиеттері:

- | | |
|----------------------------------|---|
| 1. $A + B = B + A$; | 5. $1 \cdot A = A$; |
| 2. $A + (B + C) = (A + B) + C$; | 6. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$; |
| 3. $A + O = A$; | 7. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$; |
| 4. $A - A = O$; | 8. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$, |

мұндағы A, B, C - матрицалар, α, β - сандар.

- Екі матрицаны көбейту амалы бірінші матрицаның бағандарының саны екінші матрицаның жолдарының санына тең болғанда ғана енгізіледі. $A_{m \times n} = (a_{ij})$ матрицасының $B_{n \times k} = (b_{ij})$ матрицасына көбейтіндісі деп $C_{m \times k} = (c_{ij})$ матрицасын айтамыз, оның i -ші жолда және j -ші бағанда тұрған c_{ij} элементтері, A матрицасының i -жолының және B матрицасының j -ші бағанының сәйкес элементтерінің көбейтіндісінің қосындысына тең: $c_{ij} = \sum_{\mu=1}^n a_{i\mu} b_{\mu j}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, k}$.

Мысал. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 7 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 \\ (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 7 & (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}, \text{ осыдан } A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Матрицаларды көбейту амалының қасиеттері:

$$1. A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C; \quad 3. (A + B) \cdot C = AC + BC;$$

$$2. A \cdot (B + C) = AB + AC; \quad 4. \alpha(AB) = (\alpha A)B.$$

Анықтауыштар. Квадрат матрицаның детерминанты немесе анықтаушысы бұл матрица элементтерінен құралған скалярлық шама :

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = \sum_j (-1)^{t_j} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}.$$

мұндағы $j = j_1, j_2, \dots, j_n$ - натурал сандардың $j = 1, 2, 3, \dots, n$ түрлі алмастырулары және бұл сандар жинағы $j = 1, 2, 3, \dots, n$ - негізгі алмастыру болып табылады, t_j - осы алмастыруды негізгі алмастыруға аудару қажет ететін транспозициялардың саны.

Анықтауыштың реті - бұл квадрат матрицаның бағандар (немесе жолдар) саны.

Екінші ретті анықтауыш келесі формула бойынша анықталады :

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_j (-1)^{t_j} a_{1j_1} a_{2j_2} = a_{11}a_{22} + (-1)^1 a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

j_1, j_2	t_j
$1, 2$	0
$2, 1$	1

Мысал. $\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 - (-1) \cdot 3 = 14 + 3 = 17$

Үшінші ретті анықтауыш келесі формула бойынша анықталады:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_j (-1)^{t_j} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Үш элементтен тұратын алмастырулар саны $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

j_1, j_2, j_3	t_j	
$1, 2, 3$	0	$t_j - \text{чётная}$ $t_j - \text{нечётная}$
$3, 2, 1$	3	
$2, 3, 1$	2	
$2, 1, 3$	1	
$1, 3, 2$	1	
$3, 1, 2$	2	

n -ші ретті анықтауышты $n-1$ -ретті анықтауыш арқылы және кез келген жол (немесе баған) элементтері арқылы жіктеуге болады:

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

мұндағы M_{ij} - i -жолы мен j -бағанын сызып тастағаннан шығатын $(n-1)$ -ретті анықтауыш (a_{ij} элементінің миноры деп айтады).

Ал $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ саны a_{ij} элементінің алгебралық толықтауышы деп аталады.

$$\text{Мысал. } \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -15 + 30 - 6 = 9$$

Анықтауыштың қасиеттері.

1. Анықтауыштың жолдарын сәйкес бағандармен алмастырғаннан анықтауыштың мәні өзгермейді.
2. Егер анықтауыштың екі жолын (бағанын) алмастырса, онда анықтауыштың таңбасы өзгереді.
3. Егер анықтауыштың екі жолының (екі бағанының) сәйкес элементтері өзара тең болса, онда оның мәні нөлге тең.
4. Анықтауыштың кез келген жолының (бағанының) барлық элементтерін λ саныны көбейтсек, онда оның мәні осы санға көбейтіледі.
5. Егер анықтауыштың қандай да бір жолы (бағаны) тек нөлден тұрса, онда анықтауыш нөлге тең.
6. Егер анықтауыштың екі жолы (бағаны) пропорционал болса, онда анықтауыш нөлге тең.
7. Егер қандай да бір жолдың (бағанның) элементтеріне кез келген санға көбейтілген басқа жолдың сәйкес элементтерін қосқаннан анықтауыш өзгермейді.

Пример 1. *Вычислить определитель.*

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1} 2 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \triangleleft$$